Les régularités et l'algèbre

CHAPITRE 1

Les régularités

Les élèves commencent à étudier les régularités dès le début du primaire pour plusieurs raisons. Tout d'abord, cela les aide à mieux comprendre leur environnement, qui présente souvent d'évidentes régularités. Par exemple, les élèves peuvent chercher des régularités dans la disposition des bureaux dans la classe, dans l'agencement des dalles au sol ou dans les numéros de porte des maisons de leur rue.

Cela les aidera également dans leurs futurs apprentissages en mathématique. En effet, quand les élèves savent dégager les régularités sous-jacentes, ils comprennent plus facilement de nombreux concepts abordés dans les domaines de l'arithmétique et de la géométrie, et même dans celui des mesures et de la gestion des données. Les élèves étudient aussi les régularités parce que le type de réflexion leur permettant de reconnaître, décrire, comparer, prolonger, convertir et concevoir des régularités est la fondation de la pensée algébrique, qui les aidera à réussir en mathématique dans les années suivantes.

GRANDES IDÉES SUR LES RÉGULARITÉS (GIR)

1. Les suites représentent des régularités bien définies. Il existe toujours une certaine règle, qui concerne soit quelques éléments, soit une « transformation », pouvant consister à ajouter 1, par exemple. (GIR 1)
2. Toute régularité peut être représentée de diverses façons. (GIR 2)
3. Certaines façons de disposer des données mettent en relief des régularités et des relations. (GIR 3)
4. L'utilisation des régularités permet de simplifier un grand nombre de calculs, ainsi que la représentation de mesures et d'attributs géométriques comportant des nombres (par exemple, le nombre de sommets ou de faces des différents prismes). (GIR 4)

1.1 EN PRATIQUE

Les élèves peuvent faire des recherches dans des livres ou sur Internet pour trouver des exemples de régularités dans la nature, par exemple :

Introduisez la GIR 1 en posant les questions suivantes : Est-ce que le motif de cette peau de serpent est une suite ? Pourquoi ? [Oui. Les losanges bruns sont disposés en rangées de deux, chacune suivie d'un seul losange brun, et ainsi de suite, tout le long du serpent.]

Connaître les grandes idées peut aider les enseignants à choisir, adapter et créer des tâches, ainsi qu'à formuler des questions qui vont amener les élèves à établir des liens très utiles entre les notions. Dans chaque rubrique En pratique de la présente section, la ou les grandes idées sur les régularités (GIR) qui peuvent être mises en relief sont précisées.

Faire le lien entre les régularités et les classements et classifications

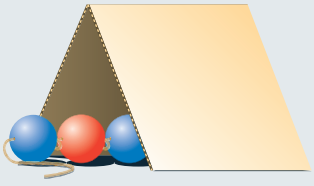
Le classement et la classification sont abordés dans le chapitre 5, aux pages 136 à 142.

Avant de pouvoir reconnaître, décrire ou prolonger une régularité, les élèves doivent effectuer un tri et une classification. On a souvent besoin de classifier ou d'évaluer les objets pour pouvoir dégager des régularités. Par exemple, pour reconnaître la régularité dans la suite de figures suivante, les élèves doivent d'abord se rendre compte que cette suite est composée de figures de deux types différents. Ils doivent prêter attention à l'un des attributs géométriques de chaque figure, c'est-à-dire au nombre de côtés, pour faire la différence entre les deux figures.

Les élèves doivent se rendre compte qu'un carré et un pentagone sont différents pour pouvoir reconnaître la régularité de cette suite.

1.2 EN PRATIQUE

Alignez des perles colorées de façon à former une suite, en répétant quatre ou cinq fois le motif (par exemple, bleu-rouge). Cachez les perles sous une tente en papier, puis révélez une partie de la suite, comme dans l'illustration ci-dessous. Demandez aux élèves de prédire ce qu'ils verront quand vous ferez glisser la tente pour dévoiler la prochaine perle.



Pour mettre l'accent sur la GIR 1, posez les questions suivantes : Pourquoi est-ce que vous n'auriez pas pu prédire la couleur de la prochaine perle si je ne vous avais pas dit qu'il s'agissait d'une suite ? [Si ça n'avait pas été une suite, la prochaine perle aurait pu être de n'importe quelle couleur.] Est-ce que vous pouvez être certains de la couleur de la prochaine perle ? Pourquoi ? [Non ; je ne sais pas si le motif est bleu-rouge ou bleu-rouge-bleu.]

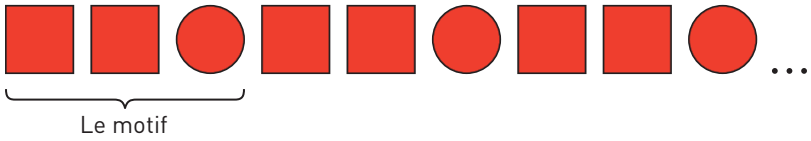
Les types de régularités

Les suites à motif répété

Les premières expériences des élèves avec les régularités impliquent généralement des suites à motif répété. Au départ, ils repèrent intuitivement les suites à motif répété. Les élèves entendent des suites rythmiques dans les sons, les chansons et les contes. Ils reconnaissent les suites de mouvements corporels dans les pas d'une danse, comme « hokey pokey ». Ils en observent aussi dans leur environnement. Les élèves s'aident de ces régularités pour faire des prédictions. Peu après, on leur présente explicitement les suites à motif répété de couleurs, de figures, de tailles et de dispositions, et, un peu plus tard, les suites numériques.

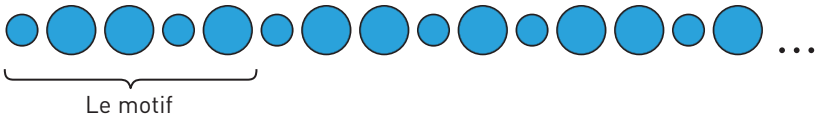
Le motif d'une suite

Dans une suite, le plus petit ensemble d'éléments qui se répète s'appelle le motif. Dans la suite ci-dessous, le motif est composé des trois premières figures, puisque c'est la plus petite séquence se répétant.



Un motif simple de trois éléments

Les élèves ont parfois du mal à déterminer quel est le motif. Par exemple, le motif de la suite ci-après comprend cinq éléments. En voyant le petit cercle se répéter en quatrième position, les élèves pourraient penser que le motif est composé d'un petit cercle suivi de deux grands. Mais, en continuant à vérifier la suite, ils se rendraient compte que leur supposition n'est pas correcte, et ils pourraient chercher le prochain petit cercle, afin de vérifier si le motif se termine là.



Un motif plus complexe

Décrire une suite répétitive

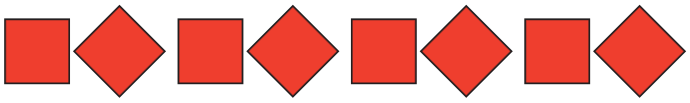
Quand les élèves sont prêts, il est utile d'introduire un système de code alphabétique permettant de décrire les suites. Le motif d'une suite AB est composé de deux éléments différents qui se répètent sans fin en alternance, par exemple : 1, 2, 1, 2, 1, 2, … Le motif d'une suite AABC est composé de quatre éléments, les deux premiers étant identiques, et différents du troisième et du quatrième, par exemple : 3, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 5, … Il est beaucoup plus simple pour les élèves d'utiliser un code alphabétique plutôt que d'écrire plusieurs répétitions et de se souvenir d'ajouter les trois points pour indiquer que la suite se poursuit.

Certains enseignants préféreront peut-être utiliser différentes lettres et parler, par exemple, d'une suite XY plutôt que d'une suite AB, pour bien souligner le caractère arbitraire du code, mais d'autres enseignants trouveront plus simple d'utiliser les premières lettres de l'alphabet pour représenter le motif d'une suite.

1.3 EN PRATIQUE

Dites aux élèves que vous pensez à une suite de la figure ABCA. Demandez-leur de représenter votre suite à l'aide de blocs mosaïques [par exemple : bloc rouge-bloc jaune-bloc bleu-bloc rouge, à répétition].

Introduisez la GIR 2 en posant les questions suivantes : Quel est le point commun entre toutes vos suites ? Quelles sont leurs différences ?



Une suite de dispositions AB

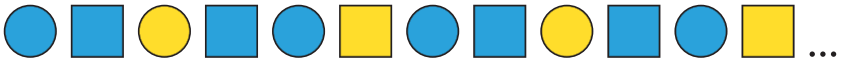
Une suite de tailles ABA

Le système de code alphabétique aide les élèves à voir que deux suites apparemment différentes peuvent être mathématiquement identiques. Par exemple, bien que toutes les suites AB soient mathématiquement identiques, les élèves ont tendance à se concentrer sur la nature de leurs éléments. Pour les élèves les plus jeunes, une suite dont le motif est cercle-carré s'avère différente d'une suite numérique du genre 1, 2, 1, 2, 1, 2, …, parce qu'ils font attention aux éléments précis plutôt qu'à la régularité sous-jacente. Ils pourraient ne pas réussir à voir que toutes les suites AB ont le même motif, composé de deux éléments différents.

Le système de code alphabétique aide les élèves à voir que deux suites apparemment différentes peuvent être mathématiquement identiques.

Bien que les élèves des premières années du primaire soient parfois exposés à des suites à deux attributs, par exemple des tailles et des figures, ils ont souvent du mal à décrire ces suites si les deux attributs ne sont pas régis par la même règle. Par exemple, ces élèves peuvent comprendre que la première suite ci-après est de type AB pour les couleurs comme pour les figures. Ils auront beaucoup plus de mal à décrire la deuxième suite (qui est de type AAB pour les couleurs, mais AB pour les figures), et, pour la plupart de ces élèves, il vaudrait probablement mieux ne pas s'attendre à ce qu'ils soient capables de le faire.

Suite à plusieurs attributs portant sur les figures et les couleurs.
Tant les figures que les couleurs relèvent d'une suite AB.



Suite à plusieurs attributs portant sur les figures et les couleurs :
AB pour les figures et AAB pour les couleurs.

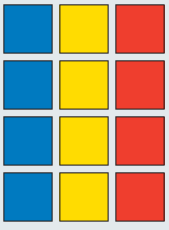
Il est important que les élèves comprennent que, même avec trois répétitions du motif d'une suite, on ne peut jamais définir une suite avec certitude.

1.4 EN PRATIQUE

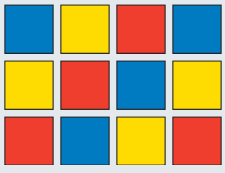
Montrez aux élèves une suite de couleurs ABC composée de 12 éléments, à l'aide de tuiles carrées (par exemple, bleu-jaune-rouge, à répétition). Ensuite, réarrangez les tuiles de deux façons différentes, comme illustré ci-dessous.

Introduisez la GIR 3 en posant les questions suivantes : Quelle disposition des 12 premiers éléments de cette suite vous permet le plus facilement de savoir ce qui vient ensuite ? [A] Pourquoi ? [Dans A, chaque rangée est une répétition du motif, alors on peut facilement prédire la rangée suivante.]

Disposition A



Disposition B

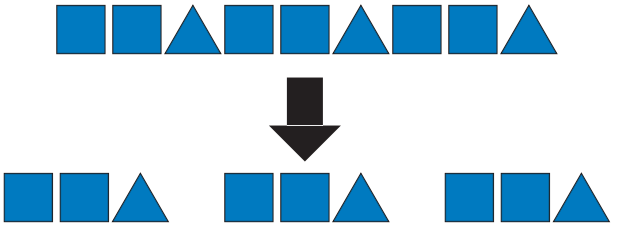


Mettre l'accent sur les suites à motif répété

Montrer au moins trois répétitions complètes d'un motif d'une suite est une bonne façon d'aider les élèves à déterminer le motif. Cela dissipe en partie l'ambiguïté intrinsèque. Par exemple, si vous ne leur montrez que 2, 4, 6, … de la suite 2, 4, 6, 2, 4, 6, 2, 4, 6, …, les élèves peuvent se demander si la suite se répète ou si elle est croissante selon la règle +2. Si vous leur montrez 2, 4, 2, 4, …, les élèves supposeront peut-être que 2, 4 vient ensuite, mais ils seront bien plus confiants dans leurs prédictions s'ils voient au moins une répétition supplémentaire du motif. Cependant, même quand le motif est répété trois fois, on ne peut jamais définir une suite avec certitude. Par exemple, 2, 4, 6, 8, … pourrait être 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, … ou 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 ou 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

Plus tard, les élèves découvriront les règles formelles qui définissent une suite précise, par exemple « une suite qui commence par 4 et où l'on ajoute 2 » ou « une suite à motif répété AABA ». En étudiant les règles des suites, ils apprendront que, sans règle, on ne peut jamais déterminer avec certitude les éléments suivants d'une suite. C'est une bonne idée de familiariser les élèves de 5 à 9 ans avec ce principe en leur demandant à l'occasion, quand ils proposent le prolongement d'une suite, s'ils peuvent être certains que la suite continue bien de cette façon ou s'il existe d'autres prolongements possibles.

La disposition des éléments d'une suite peut souvent rendre le repérage et la description du motif plus faciles ou plus compliqués pour les élèves. Par exemple, pour les élèves très jeunes, vous pourriez séparer les groupes d'éléments composant le motif, comme illustré ci-dessous.



Séparation des groupes d'éléments composant le motif
pour mettre en évidence une suite à motif répété.